多次元Parameterをもつ Brown運動について (多重マルコフ性と予測理論への応用)

数理解析研究所講究録
151巻 1972年 11-22

多次元parameterをもつBrown運動について

名大 理 野田 明男

$\{X(A);\ A\in E\}$を$E=E_n$（n次元ユークリッド空間）又はE_ω（無限次元ヒルベルト空間）をparameter spaceにするBrown運動とする。つまり$\{X(A)-X(0)\}$は平均0のGaussian systemをなし、$E[(X(A)-X(B))^2]=\mathrm{dis}(A,B)$（$\mathrm{dis}(A,B)$はAとBの距離を示す。）を満たすものである。$X(0)=0$と仮定する立場と$X(0)$を決定せずに増分のみに着目する立場とがあるが、二つの立場を適当に使いわける。こゝでは$\{X(A)\}$の従属性についての特長を調べるのを目標とする。

ボレル集合$\mathcal{E}\subset E$に対し、

$$X(A)=E[X(A)\,|\,X(P),\ P\in\mathcal{E}]+\sigma(A|\mathcal{E})\xi_A$$

という$X(A)$の標準形を考える。こゝでξ_Aはnormalized Gaussian variableである。この場合$\mathcal{E}$内の適当な点P_0を定めて、$X(P_0)=0$と仮定して標準形を得る。$E[X(A)\,|\,X(P);P\in\mathcal{E}]=\mu(A|\mathcal{E})$と書く。

P. Lévyの基本的な結果は、$\sigma(A|\mathcal{E})$の大きさに注目して、E_n

の場合には$\{X(A)\}$は non-deterministic な性質をもち、E_∞の場合には deterministic な性質をもっているということである。それを示すため彼はまず $X(A)$ を半径 t の球面上で平均して得られる $M(t)$-過程を研究した。又従属性に関する別の見方は、

$\mu(A|\mathcal{E}) = \mu(A|\mathcal{E}')$、(これは $\sigma(A|\mathcal{E})=\sigma(A|\mathcal{E}')$ と同値。)

を満たす$\mathcal{E}$の部分集合$\mathcal{E}'$に着目することである。このような$\mathcal{E}'$を Lévy は A に対する$\mathcal{E}$の minimisant な部分集合と呼んでいる。それはE_nの場合に、McKean によって解かれた Markov 性と関連することであるが、ここでは Markov 性については議論せず、E_∞の場合に Markov 性とは著しく異なる minimisant な部分集合をもつ例を述べるだけにする。最初に特殊な部分集合$\mathcal{E}$に対して$\mu(A|\mathcal{E})$の explicit な形を求め、そのことから容易にわかる若干の性質を述べ、その後上述の Lévy の基本的な定理を証明し、さらにその定理の拡張について Lévy の予想を述べる。内容の多くの部分を [1] の Ch VII と Complement Ch III から取り、それに若干の事実をつけ加えた。

§1 $M(t)$-過程とその性質

$\mathcal{E}=S(R)$ (E内の中心Oで半径Rの球) の場合を考える。Lévy は $\mu(O|S_n(t))=\int_{S_n(t)} X(P)\,d\sigma_n(P)$ (σ_nは$S_n(t)$上の一様な確率測度) であることを見つけ、

$$\mu(O|S_\omega(t)) = \lim_{n\to\infty} \mu(O|S_\omega(t)\cap Ox_1\cdots x_n\text{平面}) \quad \text{a.s.}$$

(a.s. は"ほとんど確実に"の略)を示した。これは又 E_ω の任意の無限次元部分空間 P に対し、$\mu(O|P\cap S_\omega(t))$ に一致し、さらに座標軸 Ox_i と $S_\omega(t)$ との交点を A_i とすると、

$$\mu(O|\{A_i\}_{i=1}^\infty) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(A_i) \quad \text{a.s.}$$

とも一致する。そして $\overline{M}(t) \equiv \mu(O|S(t))\ (t>0)$, $M(t)\equiv \overline{M}(t)-X(0)$ と定義して、M(t)-過程を調べ、以下の事実を証明した。

M(t)-過程の covariance を $\Gamma(t_1,t_2)\equiv E[M(t_1)M(t_2)]$ とおく。

(1) $\Gamma_n(t,t) = t\left(1-\frac{2^{n-2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma^2(\frac{n}{2})}{\Gamma(n-\frac{1}{2})}\right)$ (ただし $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数)

$\Gamma_\omega(t,t) = t\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

この値は $\mu^2(O|S(t))$ に一致する。

(2) $\Gamma_{2p+1}(t_1,t_2) = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{p} a_h \frac{t^{2h}}{t'^{2h-1}}$ $\quad t=\min(t_1,t_2)$, $t'=\max(t_1,t_2)$

$\Gamma_{2p+1}(t_1,t_2)\in C^{2p}((0,\infty)\times(0,\infty))$ で係数 a_h はこの条件で決定される。

$\Gamma_\omega(t_1,t_2) = \frac{1}{2}\left(t_1+t_2-\sqrt{t_1^2+t_2^2}\right)$

$\Gamma_\omega(t_1,t_2)$ は analytic であるから Loève の定理により $M_\omega(t)$ は二次平均の意味で analytic になり、Gaussian の場合には、さらに、a.s. の意味で analytic になる。

(3) $M_{2p+1}(t) = \int_0^t P_{2p+1}\left(\frac{u}{t}\right)dB(u)$, $P_{2p+1}(u) = \sqrt{2}\,p\frac{\sqrt{(2p)!}}{2^p\,p!}\int_u^1 (1-x^2)^{p-1}dx$

(B(u) は一次元 Brown 運動である。)なる標準表現を持ち、a.s. に $C^p(0,\infty)$.

$M'_\omega(t) = (2\pi)^{\frac{1}{4}}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2t^2}}\frac{u}{t^2}\,dB(u)$ (McKean の公式)と表現される。

(4) $Y(u) \equiv e^{-u} M(e^{2u})$ $(-\infty < u < +\infty)$ は定常過程で、そのcovarianceを $\gamma(h)$ とすると、$n \geqq 4$ のとき、

$$(2n-3)^2 \gamma_n(h) - \gamma_n''(h) = 4(n-1)(n-2)\gamma_{n-2}(h)$$

$$Y_{n-2}(t) = \frac{1}{2\sqrt{(n-1)(n-2)}} e^{-(2n-3)t} \frac{d}{dt} e^{(2n-3)t} Y_n(t)$$

となる。([4])

次に $X(0)=0$ と仮定して、$\mu(A \mid S_n(R) \cup 0)$ を任意の A に対し、McKeanの展開([5])、$X(A) = \sum_{\substack{l \le \dim \mathfrak{Z}_k \\ k \geqq 0}} x_k^l(a)\, h_k^l(S_A)$, $a = |A|$, $S_A = \frac{A}{a}$ を使って求めてみよう。

$$\mu(A \mid S_n(R) \cup 0) = \int_{S_n(1)} X(RS)\, dF_{A,R}^n(S) = \sum_{\substack{l \le \dim \mathfrak{Z}_k \\ k \geqq 0}} x_k^l(R) \frac{r_k(a,R)}{r_k(R,R)} h_k^l(S_A)$$

$S_n(1)$ 上の測度 $dF_{A,R}^n(S)$ は $\int_{S_n(1)} h_k^l(S)\, dF_{A,R}^n(S) = \frac{r_k(a,R)}{r_k(R,R)} h_k^l(S_A)$

で定義される。ここで

$$r_k(a,b) = E\{x_k^l(a)\, x_k^l(b)\} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(a+b - \int_{S_n(1)} \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}\, d\sigma_n(S)\right) & \text{for } k=0 \\ -\frac{1}{2}\int_{S_n(1)} \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}\, P_k(\cos\theta)\, d\sigma_n(S) & \text{for } k>0 \end{cases}$$

$\theta = S$ のcolatitudeで、$P_k(\cos\theta) = \frac{C_k^{(n-2)/2}(\cos\theta)}{C_k^{(n-2)/2}(1)}$, C: Gegenbauer多項式である。容易に任意の $S' \in S_n(1)$ に対し $E[(X(A)-\mu(A))X(RS')] = 0$ がいえるから上の事は正しい。

$\overline{X}(A) = X(A) - \mu(A \mid S_n(R) \cup 0)$、つまり原点と $S_n(R)$ 上の点で $X(A)$ を0にした一種のPinned Brownian motionといえるようなprocessを考えよう。そのcovariance $R(A,B)$ は、

$$R(A,B) = E\{(X(A)-\mu(A))X(B)\} = \frac{1}{2}(a+b-\mathrm{dis}(A,B)) - \sum_{k,l} \frac{r_k(a,R)\, r_k(b,R)}{r_k(R,R)} h_k^l(S_A)\, h_k^l(S_B)$$

$$= \sum_{k \geqq 0} \left\{ r_k(a,b) - \frac{r_k(a,R)\, r_k(b,R)}{r_k(R,R)} \right\} \dim \mathfrak{Z}_k\, P_k(\cos\theta) \quad (\theta = \angle AOB)$$

となる。$X(A)$ の相関係数 $\rho_n(A,B)$ を考えれば、次の事が容易にわかる。

<u>定理</u> ρ_n は k倍、回転、原点を通る超平面に関する鏡映、中心 0 の円に関する反転、これらの変換に関し不変である。つまり $\{X(A)\}$（A は $S_n(R)$ の内部又は外部を動く）の確率構造はこれらの変換に関し不変である。

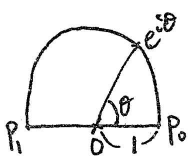
さらに $X(A)$ を増分のみに着目する立場にたてば、平行移動に関しても不変であるといえる。中心と二つの同心球 $S_n(R_1)$ と $S_n(R_2)$ で $X(A)$ を 0 にした process についても同様の事がいえる。

$X(0)=0$ と仮定せずに $\mu(A|S_n(R))$ を求めると、

$$\mu(A|S_n(R))=\int_{S_n(1)} X(Rs)\,dF^A_{R,A}(s)+\left(1-\frac{r_0(a,R)}{r_0(R,R)}\right)\int_{S_n(1)} X(Rs)\,d\sigma_n(s)$$

$$\sigma^2(A|S_n(R))=a+r_0(R,R)-2r_0(a,R)-\sum_{k>0}\frac{r_k(a,R)^2}{r_k(R,R)}\dim \mathfrak{Z}_k .$$

最後に E_2 で半径 1 の半円を $\mathcal{E}$ として $\mu(0|\mathcal{E})$ を求めよう。

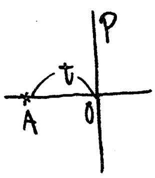


$$\mu(0|\mathcal{E})=\int_0^{\pi} X(e^{i\theta})\frac{d\theta}{4+\pi}+\frac{2}{4+\pi}\left(X(P_0)+X(P_1)\right)$$

任意の弧に対しても同様に条件付平均値が求められ、端点に singuler な測度が現われる。

§2 $\mu(A|P)$（P：超平面）について

$\mathrm{dis}(A,P)=t$ なる A に対し、$X(0)=0$ と仮定して $\mu(A|P)$ を求めよう。



$$\mu(A|P_{n-1})=\int_0^{\infty} M_{n-1}(x)\,f_n(t,x)\,dx$$

と表わされる。$M_{n-1}(x)$ は P_{n-1} 内の半径 x の球上の平均で、$f_n(t,x)$ は

$$\int_0^\infty f_n(t,x)\Gamma_{n-1}(x,y)\,dx = \frac{1}{2}\left(t+y-\sqrt{t^2+y^2}\right) \quad \text{for any } y>0$$

を満たす密度関数である。まず $tf_n(t,tx)=f_n(1,x)$ であることが $x\to tx$ と変数変換すればすぐわかるから

$$(*)-\int_0^\infty f_n(x)\Gamma_{n-1}(x,y)\,dx = \frac{1}{2}\left(1+y-\sqrt{1+y^2}\right)$$

を満たす $f_n(x)\equiv f_n(1,x)$ を求めればよい。

<u>命題</u> $f_{n+2}(x)=\dfrac{1}{(n-1)(n-2)}\{n(n-3)f_n(x)-4xf_n'(x)-x^2f_n''(x)\}$ $n\geqq 3$

$f_2(x)=(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$, $f_4(x)=\dfrac{15}{2}x^2(1+x^2)^{-\frac{7}{2}}$

<u>証明</u> $(*)$ で $x=e^{2u}$, $y=e^{2v}$ と変数変換して $g_n(u)=2f_n(e^{2u})e^{3u}$ とおくと、$(*)$ と同値な方程式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u)\gamma_{n-1}(v-u)\,du = \cosh v-\sqrt{(\cosh v)^2-\frac{1}{2}} \quad \text{for any } v$$

を得る。γ_n は前述の $Y_n(u)$ の covariance でその関係式を使えば、容易に証明される。$f_2(x)$ と $f_4(x)$ については、$(*)$ の式で $\Gamma(x,y)$ が簡単な Goursat 核の形なので、y について両辺を微分していけば得られる。

これにより $f_{2n}(x)$ は順次求められ、$f_{2n}(x)\in C^\infty$, $\int_0^\infty f_{2n}(x)\,dx=1$, $\int_0^\infty xf_{2n}(x)\,dx=1$ を満たす。

$$\sigma_{2n}^2(A\,|\,P)=\frac{t}{2}\int_0^\infty\sqrt{1+x^2}\,f_{2n}(x)\,dx$$

例えば、$\sigma_2^2=\frac{\pi}{4}t$, $\sigma_4^2=\frac{15}{64}\pi t$。

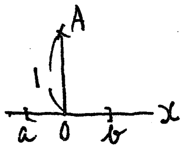
次に $\mu(A\,|\,P_{\omega-1})$ を求めよう。

$$\mu(A\,|\,P_{\omega-1})=M_{\omega-1}(t)\ ,\quad \sigma^2(A\,|\,P_{\omega-1})=\frac{t}{\sqrt{2}}.$$

このことより、超平面$P_{\omega-1}$内の半径tの球はAに対して$P_{\omega-1}$のminimisantな部分集合となっている。これはE_∞の場合にのみ見られる、Markov性とは違った著しい従属性を示す例であると思う。

AのPに対称な点をA'とすると、$\mu(A|P)=\mu(A'|P)$であり、$X(A)$と$X(A')$は独立なので、$E[\xi_A\xi_{A'}]<0$、即ち$\{X(A)\}$は超平面に関してsimple Markovの性質をもたないことがわかる。

最後にE_2で$\mathcal{E}=$線分の場合を考えよう。



$$\mu(A|\mathcal{E})=\int_a^b X(x)\frac{f_2(x)}{2}\,dx+\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)X(a)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\right)X(b)$$

半円の場合と同じく、端点にsingulerな測度が現われ、しかもこの場合(a,b)上の密度は直線全体の場合のそれと同じであることを注意する。

§3 determinismについて

$E\supset\mathcal{E}$に対して、$K(\mathcal{E})=\{\sigma(A|\mathcal{E})=0$なる$A$全体$\}\subset E$で、作用素$K$を定義する。明らかに、$K^2=K$、$K(\mathcal{E})\supset\bar{\mathcal{E}}$(閉包)、$\mathcal{E}_1\subset\mathcal{E}_2$なら$K(\mathcal{E}_1)\subset K(\mathcal{E}_2)$。そして$K(\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2)=K(\mathcal{E}_1)\cup K(\mathcal{E}_2)$が成立する、即ち$K$は閉作用素であるとLévyはいっている。それを証明することはできないけれど、次の注意をしておく。E_nの場合は次の定理により問題なく、E_∞の場合に$\mathcal{E}_1$と$\mathcal{E}_2$が同心球なら、$K(\mathcal{E}_1)=\mathcal{E}_1$で$K(\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2)=K(\mathcal{E}_1)\cup K(\mathcal{E}_2)=\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2$が成立する

ことを次のように証明できる。

$\mathcal{E}_1$と$\mathcal{E}_2$は中心Oで半径R_1とR_2の同心球とする。$X(O)=0$と仮定して、$\sigma(A|\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2\cup O)=0$なる$A\notin\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2\cup O$が存在したとすると、半径$r=\mathrm{dis}(O,A)$の球上のすべての点で$\sigma(B|\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2\cup O)=0$を満たす。つまり$\{X(P)\}\ P\in\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2\cup O$が与えられると、$M(r)$が決定される。$E_n$でのMcKeanの展開を考えると、$X(A)=M_n(|A|)+Y_n(A)$（$M_n$と$Y_n$は互いに独立）と分解されている。$E_\infty$でも、$X(A)=M_\omega(|A|)+Y_\omega(A)$（$M_\omega$と$Y_\omega$は独立）となっている。従って$M(r)$は$M(R_1)$と$M(R_2)$が与えられると決定されることになる。これは$M_\omega(t)$-過程のcovarianceを考えれば矛盾する。$X(0)=0$の条件をはずせば、なおさら、$\sigma(A|\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2)>0$ $(A\neq 0)$。Oに対しては、

$$\mu(O|\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2)=c\overline{M}(R_1)+(1-c)\overline{M}(R_2)\ ,\quad c=\frac{\sqrt{R_1^2+R_2^2}-R_1-(\sqrt{2}-1)R_2}{2\sqrt{R_1^2+R_2^2}-\sqrt{2}(R_1+R_2)}$$

$$\sigma^2(O|\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2)=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(cR_1+(1-c)R_2)>0\ .$$

故に$\mathcal{K}(\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2)=\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2$。$\mathcal{K}(\mathcal{E}_1)=\mathcal{E}_1$はこの推論を適用すれば容易に得られ、さらにこの推論は任意有限個の同心球$\mathcal{E}_i$に適用される。

$\mathcal{K}(\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{E}_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{K}(\mathcal{E}_i)$は成立しない。反例は$\mathcal{E}_i$が同心球の場合、又は平行な超平面の場合である。$\mathcal{E}_i$が半径$R_i$の同心球で、$R_i$がある有限な数に収束するとすると、$\mathcal{K}(\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{E}_i)=E_\omega$が成立する。これは$M_\omega(t)$がanalyticであることと次の定理から容易に証明される。又$\mathcal{E}_i$を平行な超平面の列で、ある点からの距離t_iが

収束するものとすると、$\mathcal{M}(\bigcap_i E_i)=E_\omega$ が成立する。$M_\omega(t)$ にかわって使われる analytic な過程は、

$N_\omega(t)=\mu(O|P_{\omega-1}(t))-X(O)$ ($P_{\omega-1}(t)$ は $x_1=t$ で定義される超平面) である。その covariance は $\frac{1}{\sqrt{2}}(t_1+t_2-\sqrt{t_1^2+t_2^2-t_1t_2})$ である。

さてその Lévy の determinism の基本的な定理を述べよう。

<u>定理</u> (i) E_n においては、$\mathcal{M}(\mathcal{E})=\overline{\mathcal{E}}$。即ち E_n では deterministic ではない。

(ii) E_ω において、その任意の開集合 $\mathcal{E}$ に対し、$\mathcal{M}(\mathcal{E})=E_\omega$。即ち E_ω では deterministic である。

<u>略証</u> (i) $n=2p+1$ のとき、O を中心とする半径 t の球の外部領域を $\tilde{S}(t)$ とすると、$\sigma^2(O|\tilde{S}(t))=\frac{1}{2}\frac{1\cdot 3\cdots(2p-1)}{2\cdot 4\cdots(2p)}t$。

何故なら、$\overline{M}(u)$ が $[t,\infty)$ で与えられたときの $M(t)=\overline{M}(t)-X(O)$ に対する条件付標準偏差は $\sigma(O|\tilde{S}(t))$ に等しい。$M(t)$ は $X(A)$ に A に independent な確率変数を加えても不変なので、$M'(u)$ が $[t,\infty)$ で与えられたとしてよい。さらに $M'(t)$ は p 重 Markov 過程なので、$M(t),\cdots M^{(p)}(t)$ が与えられたと考えてよい。$M(t)$ の標準表現をみると、$J_k=\int_0^t u^k dB(u)$ と置いて、$J_1 J_3\cdots J_{2p+1}$ が与えられたとき、$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{2p+1}{2})}J_0$ の条件付標準偏差を求める問題に帰着される。これは Legendre 多項式を用いて計算される。([2])

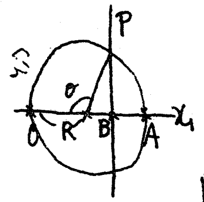
$\mathcal{E}$ は開集合と仮定してよいから、$A\notin\mathcal{E}$ に対し A を中心とする半径 $dis(A,\mathcal{E})$ の球 ($\mathcal{E}\subset E_{2p}$ なら、球を E_{p+1} 内で描く。) を考えれ

ば、$\mathcal{E}$はさく外部領域に含まれるから、

$$\mathrm{dis}(A,\mathcal{E}) \geq \sigma^2(A|\mathcal{E}) \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdots\cdots(2p-1)}{2\cdot 4\cdots\cdots(2p)}\,\mathrm{dis}(A,\mathcal{E}) > 0$$

が成立する。故に$A \notin \mathfrak{A}(\mathcal{E})$。そして$\sigma^2(A|\mathcal{E})$は$\mathrm{dis}(A,\mathcal{E})$と同じ大きさのorderであることもわかる。

(ii) $X(A)$が原点OのE_ωの近傍で既知のとき、任意の点Aで$X(A)$が決定されることを示すのが問題である。$X(0)=0$と仮定できる。Sは直径OAの球で、その半径をRとする。OAをx_1軸にとり、Pは$x_1=R(1-\cos\theta)$で定義される超平面とし、x_1軸との交点をBで表わす。



$$M_A(\theta) \equiv \mu(B\,|\,P\cap S) \quad (0<\theta<\pi)\text{。}$$

$M_A(\theta)$のcovarianceは$R\left[\sin\frac{\theta_1}{2}+\sin\frac{\theta_2}{2}-\sqrt{\frac{1-\cos\theta_1\cos\theta_2}{2}}\right]$で、$(0,\pi)\times(0,\pi)$でanalyticだから、$M_A(\theta)$はa.s.に$(0,\pi)$でanalyticである。$M_A(\theta)$は$0$の近傍で既知なので$(0,\pi)$上すべてで決定され、$X(A)=\lim_{\theta\to\pi}M_A(\theta)$も決定される。

この定理の拡張についてLévyはいろいろ述べている。無限次元超平面Pの任意の開集合(即ちE_ωの開集合とPの交わり)$\mathcal{E}$に対し、$\mathfrak{A}(\mathcal{E})=P$が成立する。$\mathfrak{A}(\mathcal{E})\supset P$は定理から明らかで、等号は$\sigma^2(A|P)=\frac{1}{2}\mathrm{dis}(A,P)$による。次に無限次元球面$S$を考えると、その開集合$\mathcal{E}$に対し$\mathfrak{A}(\mathcal{E})=S$が成立する。$\mathfrak{A}(\mathcal{E})\supset S$は定理の証明と類似の推論でいえ、$\mathfrak{A}(S)=S$は前に示した。

こうして作用素$\mathfrak{A}$はE_ωでは$\mathcal{E}$のanalyticな延長を定義するよ

うに思われ、Lévyは次のように予想した。

(a) analyticでconnectedなhypersurface $\mathcal{S}$（hyperは無限次元を意味する）の開集合 $\mathcal{E}$ に対し、$K(\mathcal{E})\supset\mathcal{S}$。さらに $\sigma^2(A|\mathcal{S})$ は $\mathrm{dis}(A,\mathcal{S})$ と同じ大きさのorderである。合わせて、$K(\mathcal{E})=\mathcal{S}$ が成立する。

(b) analyticityを弱めて、quasi-analyticなhypersurfaceも上と同様の性質をもつ。

$\mathcal{S}=\{(x,f(x))\in E'\times E''=E_\omega\}$（$\dim E'=\infty$. $\dim E''=n$. $f(x)$ はanalytic）に対し、$K(\mathcal{E})\supset\mathcal{S}$ をLévyは証明している。([3])

なおLévyは $\sigma(A|\mathcal{E})$ は $K(\mathcal{E})$ の外で A のanalytic functionであると予想している。これは $\mathcal{E}=\{A_1\cdots A_n\}$（このとき $\sigma^2(A|\mathcal{E})$ は $\mathrm{dis}(A,A_i)$ の2次多項式となる。）とか、§1.2の特別の $\mathcal{E}$ に対しては、成立している。

Referrences

[1] P. Lévy : Processus Stochastiques et Mouvement Brownien, Gauthier-Villars, Paris (1965)

[2] 〃 : A special problem of Brownian motion, and a general theory of Gaussian random functions. Proc. of the third Berkeley Symposium on math. Stat. and Prob. Berkeley (1956) p133–175

[3] P. Lévy : Le déterminisme de la fonction brownienne dans l'espace de Hilbert; second mémoire.
Ann. scient. Éc. norm. sup. t. 80 (1963) p193-212

[4] T. Hida : Canonical representations of Gaussian processes and their applications
Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser A Math 33 (1960) p109-155

[5] H.P. McKean. Jr. ; Brownian motion with a several dimensional time
Teor. Veroyatnost. i. Primenen 8 (1963) p357-378.